

МИЛОШ ВУЧИЋ¹

Универзитет у Београду

Машински факултет

ЗОРАНА ЛУЖАНИН²

Универзитет у Новом Саду

Природно-математички факултет

ПРЕГЛЕДНИ ЧЛАНАК

UDK: 37.091.3::51

BIBLID: 0353-7129, 31(2026)1, p.41-54

DOI 10.5937/norma31-67723

РАНЕ ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈЕ КАО ИЗВОР МАТЕМАТИЧКИХ ЗАБЛУДА: ПРИМЕРИ НУЛЕ И РАЗЛОМАКА³

Резиме: Предмет рада су ране генерализације као могући извор математичких заблуда у почетној настави математике, са посебним освртом на појмове нуле и разломака. Циљ рада је да се покаже како интуитивна правила, формирана на основу ограниченог броја примера и искустава у раду са природним бројевима, могу постати проблематична када се некритички пренесу у нове бројевне контексте. Применом теоријско-аналитичког приступа и разматрањем релевантне литературе анализира се однос процедуралног и концептуалног знања, као и типични облици ученичког резоновања. Резултати анализе указују да локално тачна правила могу прерасти у стабилне заблуде ако се не прецизирају услови њихове примене. Посебно се истиче да разумевање нуле и разломака захтева преиспитивање раних интуитивних правила, као и примену контрапримера, различитих репрезентација и критичке употребе дигиталних алата у развијању концептуалног разумевања.

Кључне речи: ране генерализације, математичке заблуде, нула, разломци, концептуално разумевање, методика наставе математике

Увод

Учење математике заснива се у великој мери на препознавању образаца, уочавању правилности и формирању генерализација. Већ у почетним разредима основне школе ученици, на основу ограниченог броја примера и искустава, развијају интуитивна правила о бројевима и рачунским операцијама. Таква правила имају важну дидактичку улогу, јер ученицима омогућавају да организују зна-

1 mvucic@mas.bg.ac.rs

2 zorana@dmf.uns.ac.rs

3 Истраживање је финансирао Министарство науке, технолошког развоја и иновација Републике Србије (Ев. бр. 451-03-33/2026-03/200125 и 451-03-34/2026-03/200125).

ње, препознају стабилност у математичким поступцима и ефикасније решавају познате задатке. Међутим, тешкоће настају када се правила која су тачна у једном ограниченом домену почну примењивати као општа и безусловна. У том случају оно што је у почетку било ослонац за учење може постати извор каснијих математичких заблуда (Tall & Vinner, 1981).

Овај проблем је посебно изражен у почетној настави математике, јер се у том периоду формирају основне представе о бројевима, операцијама и математичким односима. Ученици се најпре ослањају на конкретна искуства, визуелне приказе и рад са природним бројевима, па могу формирати правила као што су: сабирање доводи до повећања, одузимање до смањења, множење до увећавања, а дељење до умањивања. Иако су ова правила често продуктивна у почетном домену, она постају проблематична када се без додатног разјашњења пренесу на нулу, разломке, рационалне бројеве, децималне записе или бесконачне процесе (Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

Посебно значајни примери таквих тешкоћа могу се уочити код појмова нуле и разломака. Нула се у настави најчешће најпре повезује са одсуством количине, али у математичком смислу она није само ознака за „ништа”, већ број који има место у бројевном систему, цифра која носи позициону вредност и елемент рачунских операција. Слично томе, разломци захтевају превазилажење начина мишљења изграђеног у раду са природним бројевима, јер разломак може означавати део целине, количник, меру, однос, оператор или број на бројевној правој. Зато ученик може правилно користити појединачне симболе и поступке, а да притом још увек нема стабилно концептуално разумевање ових појмова (Ni & Zhou, 2005; Nieder, 2016; Wellman & Miller, 1986).

Полазећи од наведеног, циљ овог рада је да се анализира како рана математичка искуства и преурањене генерализације могу допринети формирању заблуда повезаних са појмовима нуле и разломака. Посебна пажња посвећена је питању како почетна настава математике подржава развој интуитивних правила, али и како та правила, уколико се не прецизирају и не ограниче, могу постати препрека за разумевање сложенијих математичких садржаја. Рад је усмерен на теоријско-аналитичко разматрање релевантне литературе из области методике наставе математике, математичког образовања и развоја математичких појмова. У раду се анализирају типични примери ученичког резонувања, улога процедуралног и концептуалног знања, као и методичке могућности за превенцију и превазилажење заблуда. Такав приступ омогућава да се грешка не посматра само као нетачан одговор, већ као траг начина на који ученик повезује старо и ново знање (Rittle-Johnson et al., 2001).

Теоријски оквир - Од ране генерализације до стабилне заблуде

Формирање математичких појмова у почетној настави

Ране генерализације настају када ученик, полазећи од ограниченог броја примера, учену правилност прихвати као стабилно правило. У почетној настави математике то је природан и неопходан део развоја мишљења, јер ученик на тај начин организује искуства и гради прве везе између бројева, операција и њихових резултата. Такве генерализације у почетку најчешће нису погрешне: оне су локално тачне у домену у ком су настале и зато имају важну наставну функцију. Међутим, њихова ограниченост постаје видљива тек када се промени бројевни домен или начин представљања математичког појма. Правило које је у раду са природним бројевима било поуздан ослонац може, при сусрету са нулом, разломцима или децималним записима, постати извор погрешног закључивања. Због тога формирање математичких појмова не подразумева само усвајање нових поступака, већ и постепено прецизирање услова под којима раније усвојена правила важе.

Концептуално и процедурално знање

Процедурално знање односи се на познавање алгоритама, правила и поступака, док концептуално знање подразумева разумевање односа, значења, принципа и повезаности између математичких идеја (Lenz et al., 2024; Rittle-Johnson et al., 2001). Ова подела је значајна зато што ученик може успешно извести одређени поступак, а да притом не разуме у потпуности зашто тај поступак функционише, у којим условима важи и када престаје да буде оправдан.

Ипак, концептуално и процедурално знање не треба посматрати као потпуно одвојене облике знања. Истраживања показују да се они развијају узајамно и итеративно: концептуално разумевање може подржати смисленију примену процедура, док рад са процедурама може допринети продубљивању разумевања математичких односа (Rittle-Johnson et al., 2001; Rittle-Johnson et al., 2015). Проблем у настави не настаје из саме употребе процедура, већ онда када се поступци уводе и увежбавају без довољно јасног концептуалног ослонаца. Тада знање може бити функционално у познатим задацима, али нестабилно када се промени контекст, репрезентација или бројевни домен.

Додатно, процедурално знање није нужно само механичко памћење. Стар [Star] истиче да оно може бити површно или дубље, у зависности од тога да ли ученик поступак примењује рутински или разуме његову структуру, услове примене и могуће варијације (Star, 2005). Слично томе, Баруди [Baroody] и сарадници

ци указују да се однос концептуалног и процедуралног знања не сме свести на једноставну супротност „разумевања” и „памћења правила” (Baroody et al., 2007). За наставу математике то значи да циљ није потискивање процедура, већ њихово повезивање са значењем, аргументацијом и свешћу о домену важења правила.

Математичке заблуде као последица преурањене јенерализације

Математичке заблуде се у наставној пракси често поједностављено тумаче као последица непажње, слабог памћења или недовољног вежбања. Иако поједине грешке могу настати услед брзоплетости или недовољне увежбаности, заблуде имају дубљу концептуалну основу: оне представљају стабилније обрасце мишљења који су за ученика смислени, интуитивно прихватљиви и усклађени са претходним искуствима. Зато их не треба поистоветити са сваком нетачном процедуром, јер грешка може бити тренутни пропуст, док заблуда означава концептуални модел из кога се сличне грешке понављано јављају. Кључни механизам њиховог настанка је преношење раније продуктивних правила у нови контекст. Увођењем нуле, разломака и рационалних бројева ученик се суочава са ситуацијама у којима раније интуиције више не дају поуздан ослонац. На пример, множење више не мора увек да увећава број, дељење не мора увек да га умањује, а већи број у запису не значи нужно већу бројевну вредност. Ако се ова промена не учини наставно видљивом, ученик може наставити да примењује раније правило и када су се услови његове примене променили.

Посматрано из развојне перспективе, разумевање нуле изграђује се постепено. Деца најпре препознају симбол и повезују га са одсуством објеката, а тек касније развијају разумевање нуле као броја који има место у бројевном систему и односе са другим бројевима (Wellman & Miller, 1986). Ниедер [Nieder] овај прелаз описује као захтеван когнитивни корак, јер дете треба да прихвати да „ништа” може постати математички објекат (Nieder, 2016).

Прелаз са природних бројева на разломке такође подразумева промену саме идеје броја. Разломак није само део целине, већ може означавати број, меру, количник, однос и оператор (Lamon, 2012). Управо ова вишезначност чини разломке једним од најзахтевнијих садржаја у основношколској математици. Ученици често преносе својства природних бројева на разломке, па бројилац и именилац посматрају као два независна цела броја, а не као делове једне бројевне вредности. Ова појава у литератури се описује као пристраност природних бројева, односно као тенденција да се рационални бројеви тумаче кроз правила која важе за природне бројеве (Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

Таква пристраност нарочито долази до изражаја при поређењу разломака са истим бројоцем или истим имениоцем. Истраживања показују да ученици разломак често не тумаче као јединствену бројевну вредност, већ као два одвојена природна броја, због чега се при поређењу ослањају на величину бројилаца

или именилаца, а не на однос који они граде (Obersteiner et al., 2013; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Зато ученик може закључити да је веће од, јер је 7 веће од 5, не уочавајући да већи именилац, при истом бројоцу, означава мање делове исте целине. Ова грешка показује да ученик правило из природних бројева механички преноси на разломке: у природним бројевима већи број заиста означава већу количину, али код разломака вредност не зависи од бројилаца и именилаца посматраних одвојено, већ од њиховог односа.

Слично томе, ученик који је дуго развијао интуицију да множење увећава број може тешко прихватити да множење позитивним разломком мањим од један смањује вредност, док дељење разломком мањим од један може довести до већег резултата. Зато разумевање разломака захтева развој осећаја за величину броја, рад на бројевној правој и повезивање различитих репрезентација (Siegler et al., 2013). Стабилност оваквих заблуда има и метакогнитивну димензију: ученик може бити сигуран у нетачан одговор ако се он ослања на раније потврђено искуство, па је за њихово отклањање потребно да препозна границе примене раније усвојеног правила у новом математичком контексту (Grenell et al., 2024).

Из тог разлога, математичке заблуде треба посматрати као показатеље начина на који ученик повезује старо и ново знање. Оне нису само знак незнања, већ често сведоче о томе да ученик покушава да нови садржај објасни помоћу раније изграђених правила. Наставни задатак, стога, није да се ране интуиције једноставно одбаце, већ да се прецизирају, ограниче и поставе у одговарајући математички контекст. Управо зато је важно да се у настави стално разматра не само да ли је неко правило тачно, већ и у ком домену, под којим условима и са којим ограничењима оно важи. У Табели 1 приказани су примери локално тачних раних генерализација које могу постати извор каснијих концептуалних тешкоћа ако се пренесу у нови бројевни контекст без додатног разјашњења.

Табела 1: Рана локално тачна правила и могући каснији концептуални ризици

Рана генерализација	Могући каснији ризик
Сабирање повећава	Ученик може теже уочити улогу нуле као броја који при сабирању не мења вредност израза.
Множење увећава.	Ученик може очекивати да множење увек повећава број, што отежава разумевање множења нулом, јединицом и бројем мањим од један.
Дељење умањује	Ученик може очекивати да дељење увек смањује број, што отежава разумевање дељења разломком мањим од један.
Већи природан број означава већу количину.	Ученик може исти начин поређења пренети на разломке и погрешно закључити да је разломак са већим имениоцем увек већи.
Разломак представља део целине.	Ученик може теже прихватити да разломак може бити и број на бројевној правој, количник или однос.

Анализа појмова нуле и разломка у контексту ученичких заблуда

Нула као извор математичких заблуда

Концепт нуле представља један од првих апстрактних математичких појмова са којима се ученици сусрећу у почетној настави. Иако се нула уводи рано и ученици релативно брзо усвајају основна правила њене употребе, њено разумевање често остаје претежно процедурално: ученик зна шта треба да уради у познатом задатку, али не мора разумети зашто правило важи и како се значење нуле мења у различитим математичким контекстима.

Ученици најпре препознају њен симбол и повезују га са одсуством количине, а тек касније развијају разумевање нуле као броја који има место у бројевном систему и односе са другим бројевима (Wellman & Miller, 1986). Ниедер овај прелаз описује као трансформацију одсуства у апстрактну категорију, односно као ситуацију у којој „ништа” постаје „нешто” у математичком мишљењу (Nieder, 2016). Управо у томе лежи концептуална сложеност нуле: она истовремено означава одсуство количине, али функционише и као број, цифра у позиционом запису, неутрални елемент за сабирање и елемент са посебним својствима у множењу и дељењу. Ако се ова различита значења не повежу, нула може остати схваћена као изолован симбол или скуп правила која се памте, а не као појам чије се значење мења у зависности од операције и контекста.

Посебан методички проблем представља то што се правила која укључују нулу често уводе као готове процедуре које ученици памте без дубљег концептуалног разумевања. Ученици рано усвајају да је $7 + 0 = 7$, $7 - 0 = 7$ или $7 \cdot 0 = 0$. Међутим, уколико не разумеју различито значење нуле у овим операцијама, могу настојати да пронађу једно интуитивно објашњење које би важило у свим случајевима. Због тога се у наставној пракси могу јавити и наизглед шаљива, али методички значајна тумачења, на пример да је „множење опасно за број 7” јер се при множењу нулом број „губи”. Такви примери показују да се операције често посматрају кроз конкретне последице над бројевима, а не кроз формалне односе у алгебарској структури.

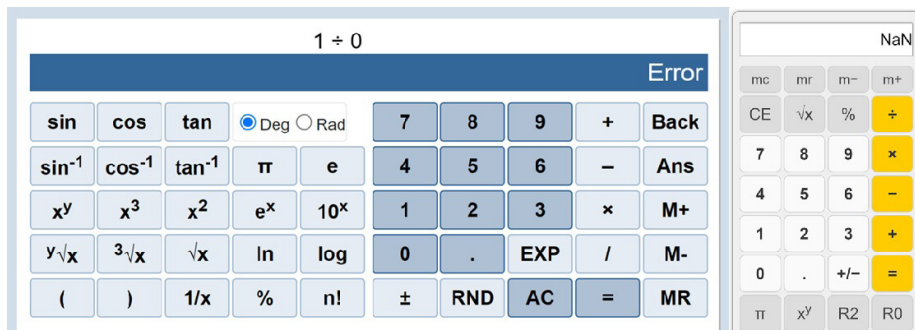
Једна од најизразитијих тешкоћа повезана је управо са дељењем нулом. У почетној настави ученици усвајају правила попут „нула може бити дељеник, али не може бити делилац”, при чему се ова тврдња често прихвата као формална забрана без дубљег образложења. Када покушају да јој пронађу смисао, најчешће се ослањају на раније развијене интуитивне моделе дељења као расподеле или груписања, који су делотворни у једноставним ситуацијама, али постају недовољни када се постави питање шта уопште значи „делити нулом”. У наставним програмима математике и уџбеницима за основну школу правило о дељењу нулом појављује се релативно рано: нула се већ у првом разреду појављује као број, у другом

разреду као чинилац, дељеник и недозвољени делилац, а у старијим разредима као саставни део разломака, целих и реалних бројева, алгебарских израза, једначина, неједначина и функција. Посебно је значајно што се забрана дељења нулом формулише у периоду у ком ученици још увек немају развијен концептуални оквир за разумевање разлога недефинисаности, па се правило памти и репродукује, али без разумевања његовог математичког упутишта.

Истраживања показују да тешкоће у разумевању нуле нису карактеристичне само за ученике. Вилер и Фегали [Wheeler & Feghali] показали су да и будући учитељи могу имати несигурно разумевање нуле, укључујући тешкоће у прихватању нуле као броја и у објашњавању израза у којима се нула јавља као делилац (Wheeler & Feghali, 1983). Расел и Черноф [Russell & Chernoff] додатно указују да и наставници могу задржати парцијална схватања нуле ако се ослањају претежно на свакодневно значење „ништа” или на изолована рачунска правила (Russell & Chernoff, 2011). Ови налази су методички значајни јер показују да разумевање нуле није само питање ученичког развоја, већ и питање квалитета наставничког математичког и дидактичког знања.

У савременом дигиталном окружењу проблем дељења нулом добија додатну методичку и концептуалну димензију. Ученици се са изразима облика $a : 0$ не сусрећу само у уџбенику и наставној пракси, већ и кроз калкулаторе, мобилне апликације, веб-алате и различите рачунарске програме. Будући да их ученици често доживљавају као поуздан извор тачних резултата, дигитални прикази могу снажно утицати на разумевање математичких појмова.

При покушају израчунавања израза $1 : 0$, различити дигитални алати могу приказати различите поруке и симболе, као што су „Error”, „Undefined”, „NaN” или „DivByZero” (Слика 1). Овакви прикази могу бити корисни као полазиште за разговор о недефинисаности израза, али без објашњења ученик може математику разумети као систем у коме алат операције једноставно „прихвата” или „одбија”, без увида у разлоге таквог исхода.



Слика 1: Приказ израза на калкулатору који даје поруку „Error” или „NaN”.

Посебну пажњу захтевају ситуације у којима дигитални алат, уместо поруке о грешци, приказује симбол бесконачности (Слика 2). Такав приказ може код ученика створити погрешан утисак да је дељење нулом дозвољено и да му је резултат бесконачност. Ова недоумица је додатно појачана тиме што дигитални алати могу користити различите програмске конвенције, нумеричке апроксимације и начине представљања граничних процеса, које ученици најчешће не могу самостално да разумеју без одговарајућег концептуалног предзнања.



Слика 2: Приказ израза у дигиталним алатима који као резултат приказују поруку „Infinity“ или симбол бесконачности ∞ .

Овакви примери показују да савремена настава математике мора укључивати и критичку анализу резултата које приказују дигитални алати. Уместо да калкулатор буде само средство за добијање одговора, он може постати подстицај за дискусију о значењу математичких појмова, ограничењима одређених процедура и разликама између формалне математике и рачунарске имплементације математичких операција.

Разломци као извор математичких заблуда

Почетно искуство ученика са разломцима најчешће је повезано са појмом половине. Ученици у нижим разредима уче да се „половина добија када једно цело поделимо на два једнака дела“, али и да је „половина од осам предмета једнака четири предмета“, чиме се већ отвара разлика између дела целине и односа две количине. Касније се исти појам јавља као број на бројевној правој, као количник, као оператор и као део симболичког записа. Ако се ова значења не повежу, ученик може знати појединачне процедуре, али не и разумети шта разломак уопште представља. Процес формирања ових значења обично пролази кроз више нивоа генерализације. Ученик најпре развија перцептивну генерализацију, да се једна јабука може поделити на две половине. Затим се јавља аритметичка генерализација заснована на једнаким сабирцима (на пример $4 + 4 = 8$), а потом и алгебарска генерализација у којој се број 8 посматра као производ 4×2 , па се закључује да је 4 половина броја 8. На тај начин ученик постепено прелази од конкретне предста-

ве дела целине ка симболичким релацијама међу бројевима. Међутим, током тог прелаза често долази до мешања различитих значења разломака и различитих нивоа репрезентације, па разломак понекад остаје схваћен само као „пар бројева“, а не као јединствена величина.

Један од типичних извора заблуда јесте преношење својстава природних бројева на разломке. При сабирању разломака то се може испољити у погрешном поступку, када ученик сабира бројилац са бројиоцем, а именилац са имениоцем, ослањајући се на логику сабирања природних бројева. Оваква грешка указује на то да ученик разломак не разуме као јединствену бројевну величину, већ као два одвојена природна броја на која примењује раније усвојена правила.

Тешкоће додатно постају видљиве при преласку из скупа природних бројева у скуп позитивних рационалних бројева. У раду са природним бројевима ученици развијају стабилна процедурална правила: сабирање „повећава“, одузимање „умањује“, множење „увећава“, а дељење „смањује“. Међутим, при раду са разломцима исте операције више немају иста интуитивна значења. Пример показује да множење може дати мањи резултат, док дељење разломком доводи до још већег конфликта, јер резултат операције директно нарушава претходно формирану интуицију да дељење мора дати мањи број.

Пре увођења разломака, дељење се за ученике углавном посматра као поступак: постоје дељеник, делилац и количник као резултат операције. Код разломака запис истовремено означава и операцију и број. Дељеник и делилац постају бројилац и именилац, док запис који је раније означавао процес сада постаје математички објекат. Разумевање овог прелаза од процеса ка објекту кључно је за касније разумевање рационалних бројева, алгебарских израза и функција, али уједно представља један од најважнијих концептуалних изазова у учењу разломака.

Савремени приступи настави математике стога наглашавају потребу за развојем концептуалног разумевања разломака кроз коришћење различитих репрезентација, повезивање више значења разломака и подстицање ученика да образлажу своје закључке, а не само да правилно примењују алгоритме. Посебан значај имају контрапримери и задаци који доводе у питање раније формиране интуиције, јер управо такве ситуације доприносе развоју флексибилнијег математичког мишљења и дубљег разумевања рационалних бројева. Истраживања показују да успешно извођење поступка не мора да значи и разумевање величине разломака, његовог места на бројевној правој и односа са другим бројевима, па се разломци с правом посматрају као важан показатељ развоја математичке компетенције (Lenz et al., 2024; Xu et al., 2024). Додатне тешкоће настају када се разумевање разломака сведе на њихово претварање у децимални запис. Иако такав поступак може бити практичан, он често прикрива недовољно развијено концептуално разумевање, јер се ученици уместо на односе међу разломцима ослањају на процедуре и правила рада са децималним бројевима.

Дигитални алати и калкулатори могу додатно учврстити овакав приступ, јер разломке најчешће аутоматски приказују у децималном облику. Тако се значење разломка као величине потискује у други план, док се разломак све чешће доживљава као запис који треба „претворити“ у децимални број. Притом, правило да се децимални бројеви пореде „цифру по цифру“, односно да је број са већом цифром на првом месту разликовања већи, функционише у многим ситуацијама и представља процедурално ефикасан образац мишљења. Проблем настаје када ученици покушају да исто правило примене на бесконачне децималне записе. Тако, на пример, при поређењу бројева и ученици често закључују да је, јер интуитивно полазе од идеје да „увек постоји још једна цифра“ или да је „број који почиње нулом мањи од броја 1“. Овакво резонување показује како процедурално успешна правила, развијена у раду са коначним децималним записима, могу постати извор каснијих концептуалних заблуда при разумевању бесконачних процеса и реалних бројева (Vučić et al., 2026). На тај начин се заблуде о разломцима, децималним записима и бесконачности међусобно преплићу, док употреба аналогije при прелазу са целих бројева на разломке може бити ослонац само ако је методички вођена тако да ученици уоче границе раније усвојених правила (Siegler et al., 2011; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; Yu et al., 2024).

Методичке импликације и препоруке за наставу

Анализа нуле и разломака показује да се математичке заблуде не могу ефикасно превазилазити само додатним увежбавањем поступака. Ако је узрок тешкоће у начину на који ученик разуме број, операцију или домен важења правила, онда понављање истог алгорита може само учврстити површно знање. Зато наставу треба усмерити на повезивање процедуралног и концептуалног знања, као и на развијање навике да се математичка правила тумаче у односу на услове у којима важе. Ране генерализације не треба одбацити, јер су оне природан део почетног математичког мишљења, већ их треба прецизирати, ограничити и повезати са новим бројевним доменима.

Полазећи од таквог разумевања наставне улоге генерализација, различите улоге нуле потребно је систематски повезивати, а не уводити као низ одвојених правила. Нулу треба разматрати као број, цифру у позиционом запису, неутрални елемент за сабирање, чинилац у множењу, границу између позитивних и негативних бројева и координату на бројевној правој. Упоређивањем ових употреба ученици се усмеравају да нулу разумеју као математички појам чије се значење мења у зависности од операције или контекста у коме се јавља.

Исти принцип треба применити и у настави разломака. Разломке је потребно представљати не само кроз алгоритме за рачунање, већ и као број, део целине, количник, меру, однос и оператор. Посебну пажњу треба посветити задацима у којима ученици уочавају да правила из домена природних бројева не

важе увек у раду са разломцима, на пример да множење не мора увек да увећа број, нити дељење увек да га умањи.

У настави је корисно тражити од ученика не само резултат, већ и кратко објашњење поступка. Такво образложење наставнику омогућава да препозна да ли ученик разуме појам и услове примене правила или само механички примењује научени алгоритам. Ритл-Џонсон [Rittle-Johnson] истиче да подстицање ученика да објашњавају своје идеје у математици може допринети развоју концептуалног знања (Rittle-Johnson, 2024).

Важну улогу у настави треба да имају и пажљиво одабрани контрапримери, јер помажу ученицима да се суоче са погрешним уверењима и уоче границе ранијих генерализација (Zazkis & Chernoff, 2008). Када ученик очекује да правило важи у свим случајевима, пример у коме оно престаје да важи може постати полазиште за дубље разумевање. Тако задаци који укључују множење нулом, дељење разломком мањим од један или поређење разломака са истим бројоцем могу послужити као ситуације у којима се преиспитују почетне интуиције.

Савремени дигитални алати могу додатно подржати овакав приступ, али само ако се користе критички и у јасно осмишљеном наставном контексту (Drijvers, 2015). Различити прикази које калкулатори и софтвери дају при покушају дељења нулом могу бити драгоцен методички материјал, јер ученицима показују да дигитални приказ није исто што и математичко објашњење. Задатак наставника није само да покаже који је приказ математички прихватљив, већ да ученике усмери да разумеју шта значи да израз није дефинисан, зашто се у неким окружењима јавља симбол бесконачности и због чега рачунарска порука не може заменити математичко образложење.

Закључак

Разматрање нуле и разломака показује да појмови који се у настави уводе рано нису нужно и концептуално једноставни. Напротив, управо такви појмови могу постати извор трајних тешкоћа ако се њихова употреба сведе на памћење правила и извођење поступака, без разумевања значења, услова и граница њихове примене.

Нула је у том погледу посебно значајна јер од ученика захтева да повежу свакодневно значење одсуства количине са њеном улогом броја, цифре у позиционом запису и елемента рачунских операција. Дељење нулом јасно показује разлику између правила које се репродукује и правила које се разуме: тврдња „нулом се не дели“ има пуну математичку вредност тек када ученик разуме зашто та операција није дефинисана.

С друге стране, разломци откривају ограничења мишљења изграђеног у домену природних бројева. Када ученик разломак посматра као два независна цела броја или очекује да множење увек увећава, а дељење увек умањује, он не грешу случајно, већ примењује раније функционална правила у новом домену у

коме она више нису довољна. Зато задатак наставе није да ране генерализације једноставно одбаци, већ да их прецизира, ограничи и повеже са ширим математичким контекстом.

Настава усмерена на концептуално разумевање треба да омогући ученицима да уочавају услове важења правила, користе различите репрезентације, објасњају поступке и контрапримере сагледавају као средство за разјашњавање математичких односа. Дигитални алати у том процесу могу бити корисна подршка, али само ако се њихови прикази не прихватају као коначни одговори, већ као повод за математичко тумачење.

Значај анализе раних генерализација није само у препознавању могућих извора ученичких грешака, већ у усмеравању наставе ка развоју флексибилног и преносивог математичког знања. Рад са нулом и разломцима зато има шири методички значај: он показује да се математичка правила не усвајају као изоловане процедуре, већ као смислени односи чије важење зависи од домена, услова и начина представљања.

Литература

- Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 115-131. <https://doi.org/10.2307/30034952>
- Drijvers, P. H. M. (2015). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). In S. J. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 135-151). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_8
- Grenell, A., Butts, J. R., Levine, S. C., & Fyfe, E. R. (2024). Children's confidence on mathematical equivalence and fraction problems. *Journal of Experimental Child Psychology*, 246, Article 106003. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2024.106003>
- Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3rd ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203803165>
- Lenz, K., Reinhold, F., & Wittmann, G. (2024). Transitions between conceptual and procedural knowledge profiles: Patterns in understanding fractions and indicators for individual differences. *Learning and Individual Differences*, 116, Article 102548. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2024.102548>
- Ni, Y., & Zhou, Y. - D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3
- Nieder, A. (2016). Representing something out of nothing: The dawning of zero. *Trends in Cognitive Sciences*, 20(11), 830-842. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2016.08.008>
- Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J., & Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert

- mathematicians. *Learning and Instruction*, 28, 64-72. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.05.003>
- Rittle-Johnson, B. (2024). Encouraging students to explain their ideas when learning mathematics: A psychological perspective. *The Journal of Mathematical Behavior*, 76, Article 101192. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101192>
- Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review*, 27, 587-597. <https://doi.org/10.1007/s10648-015-9302-x>
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346-362. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346>
- Russell, G., & Chernoff, E. J. (2011). Seeking more than nothing: Two elementary teachers' conceptions of zero. *The Mathematics Enthusiast*, 8(1-2), 77-112. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1207>
- Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, 17(1), 13-19. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.11.004>
- Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62(4), 273-296. <https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001>
- Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14(5), 503-518. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.015>
- Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404-411. <https://doi.org/10.2307/30034943>
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14(5), 453-467. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.013>
- Vučić, M., Lužanin, Z., & Kaplar, M. (2026). The intangible nature of actual infinity: A study of misconceptions among engineering students. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s40753-026-00302-z>
- Wellman, H. M., & Miller, K. F. (1986). Thinking about nothing: Development of concepts of zero. *British Journal of Developmental Psychology*, 4(1), 31-42. <https://doi.org/10.1111/j.2044-835X.1986.tb00995.x>

- Wheeler, M. M., & Feghali, I. (1983). Much ado about nothing: Preservice elementary school teachers' concept of zero. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(3), 147-155. <https://doi.org/10.2307/748378>
- Xu, C., Di Lonardo Burr, S., Li, H., Liu, C., & Si, J. (2024). From whole numbers to fractions to word problems: Hierarchical relations in mathematics knowledge for Chinese Grade 6 students. *Journal of Experimental Child Psychology*, 242, Article 105884. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2024.105884>
- Yu, S., Sidney, P., Kim, D., Thompson, C. A., & Opfer, J. E. (2024). From integers to fractions: The role of analogy in transfer and long-term learning. *Journal of Experimental Child Psychology*, 243, Article 105918. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2024.105918>
- Zazkis, R., & Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics*, 68(3), 195-208. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9110-4>
-

EARLY GENERALIZATIONS AS A SOURCE OF MATHEMATICAL MISCONCEPTIONS: EXAMPLES OF ZERO AND FRACTIONS

Summary: The subject of this paper is early generalizations as a possible source of mathematical misconceptions in early mathematics education, with particular emphasis on the concepts of zero and fractions. The aim of the paper is to show how intuitive rules, formed on the basis of a limited number of examples and experiences with natural numbers, may become problematic when uncritically transferred to new numerical contexts. By applying a theoretical-analytical approach and reviewing relevant literature, the paper analyzes the relationship between procedural and conceptual knowledge, as well as typical forms of students' reasoning. The results of the analysis indicate that locally valid rules may develop into stable misconceptions if the conditions of their application are not specified. It is particularly emphasized that understanding zero and fractions requires a reexamination of early intuitive rules, as well as the use of counterexamples, different representations, and the critical use of digital tools in developing conceptual understanding.

Keywords: early generalizations, mathematical misconceptions, zero, fractions, conceptual understanding, methodology of mathematics teaching